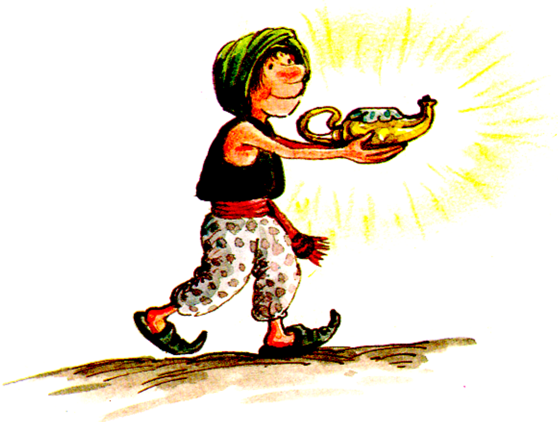
A POTENCIAÇÃO EM Q_0^+

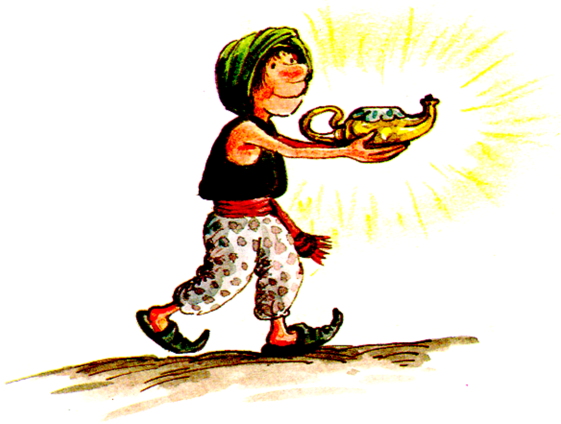
Aladino e
a lamparina mágica



Para o 6º Ano de Escolaridade

POTÊNCIAS:
CÁLCULO, LEITURA E ESCRITA

Aladino tinha um amigo secreto, um génio. Quando precisava dele esfregava uma lamparina e o génio aparecia para o ajudar e proteger.



Uma tarde, desejando ter os trabalhos de casa já feitos, esfregou a lamparina mas o génio não apareceu. Ficou então muito triste e decidiu pedir-te ajuda.

ALADINO - Olá. Tenho uns exercícios para fazer, mas estou com dificuldades. Preciso da tua ajuda. Na aula, o professor disse que o seguinte produto de factores iguais:

$$2 \times 2 \times 2$$

podia ser representado de outra forma. Sabes qual é?

ALUNO - Deixa-me pensar. No exemplo que deste, o factor que se repete é o .... e repete-se .... vezes. Portanto, posso representá-lo sob a forma de uma ....

ALADINO - Ah! Já me lembro! Estudei as potências no quinto ano de escolaridade.

ALUNO - Eu também as estudei no ano passado. Ao factor que no produto se repete chama-se .... e o .... indica o número de vezes que esse factor se repete.

ALADINO - Então, no exemplo dado pelo professor, como se representa?

ALUNO - É fácil. Representa-se pela potência:

$\square^{\square}$ → é o **expoente**
→ é a **base**

E, como podes verificar,

2^3 = ... × .... × ....

= .... × ....

= ....

sendo de .... o seu valor numérico.

ALADINO - E como defines então uma potência?

ALUNO - Aladino. Uma potência é uma forma de representar um .... de .... iguais.

ALADINO - Sim. Por exemplo, 5^2, 4^3 e 2^4 são potências.

ALUNO - Sim. São potências e o valor numérico de cada uma é:

5^2 = ... × ....

= ....

4^3 = ... × .... × ....

= .... × ....

= ....

2^4 = ... × .... × .... × ....

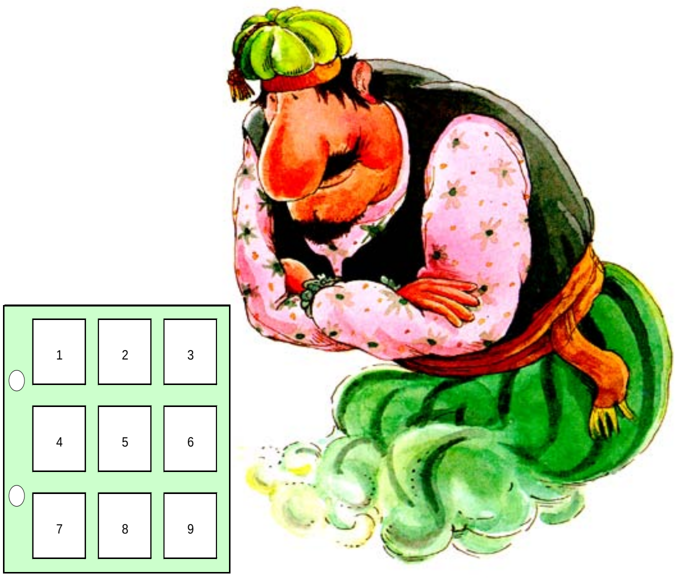
= .... × .... × ....

= .... × ....

= ....

ALADINO - Julgo ter ficado a saber calcular o valor numérico de potências. No entanto, não vejo qual é a vantagem em representar um produto de factores iguais sob a forma de uma potência!

Como a resposta não era fácil de encontrar, Aladino começou a sentir-se incapaz de encontrar a solução.

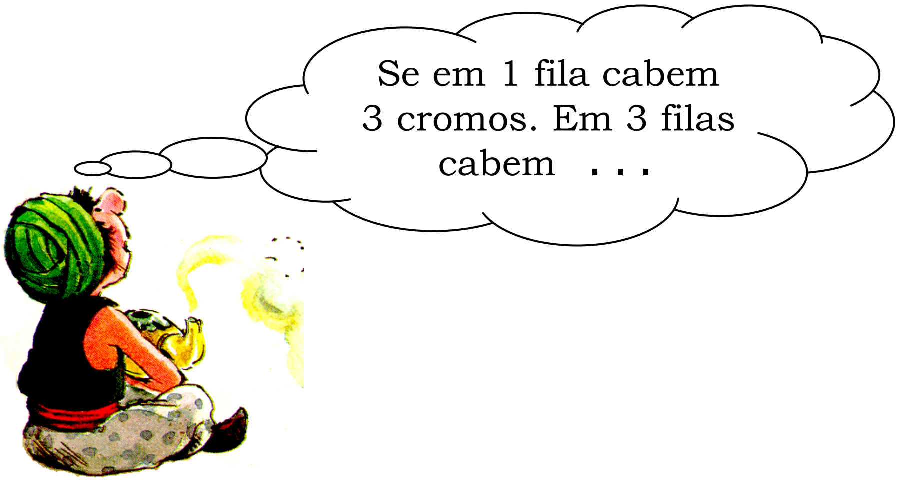


E foi precisamente num momento de certa inquietação que Aladino, sem querer, esfregou a lamparina que se encontrava à sua beira em cima da mesa, e viu aparecer à sua frente o génio que, querendo ajudar, fez aparecer uma folha de um álbum de cromos.

ALADINO - Ei! Assustaste-me. Cheguei a pensar que me tinhas abandonado. Que é isso?

GÉNIO - Aladino. Quantos cromos se podem colocar em 3 páginas iguais a esta?

ALADINO - Deixa-me pensar...



ALUNO – Numa página, cabem (......... x ....) cromos.

Então, em 3 páginas cabem:

.... x (......... x ....) = ... cromos

GÉNIO - Correcto. E qual de vós consegue representar este último produto de factores iguais sob a forma de uma potência?

ALUNO - Eu. É fácil.

$$3 \times 3 \times 3 = \square^{\square}$$

ALADINO - Agora compreendo. Uma potência torna a escrita matemática mais cómoda. Por exemplo, é menos trabalhoso e complicado escrever $\mathbf{2^6}$ do que:

$$\mathbf{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$

Afinal, as potências até são fáceis e .

GÉNIO - Concordo contigo, Aladino. Mas não julgues que já aprendeste tudo. Há mais a aprender. Por exemplo, como se lê uma potência?

ALUNO – Creio saber. Por exemplo:

2^2 lê-se: "*dois ao quadrado*"

ou

".."

ou

".."

4^3 lê-se:

".."

ou

".."

ou

"*terceira potência de quatro*"

3^5 lê-se:

"*três elevado a cinco*"

ou

".."

5^{27} lê-se:

".."

ALADINO - E como se lê a potência $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$?

ALUNO - Com fracções, lê-se da mesma maneira. Como a base é dois terços, lê-se:

"*dois terços* ...."

ALADINO - E qual é o seu valor numérico?

ALUNO - Repara que a base é dois terços e multiplica-se quatro vezes. Então, vem que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ }$$

$$= \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ }$$

$$= \frac{\ }{\ } \times \frac{\ }{\ }$$

$$= \frac{\ }{\ }$$

ALADINO - E no caso: $\frac{2^3}{5}$? Como se lê? E qual é o valor da fracção?

ALUNO - Como já sabes, numa fracção existe um numerador e um denominador. Aqui, apenas o numerador é uma potência. Portanto, lê-se:

".."

e calcula-se da seguinte maneira:

$$\frac{2^3}{5} = \frac{\ \times\ \times\ }{5} = \frac{\ }{5}$$

Já agora Aladino, deves também ter estudado que:

$6^1 = ...$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{}{}$$

ALADINO - Estou a perceber. Sempre que o expoente é igual a 1, a potência tem valor numérico igual ao da sua base.

ALUNO - Sim, é verdade. A conclusão que tiramos é que:

"qualquer número racional elevado a um é igual a ....".

ALADINO - E se o expoente for zero?

ALUNO - Se o expoente for zero, o valor numérico da potência é sempre igual a um (1), desde que a base seja diferente de zero. Repara nestes exemplos:

$2^0 = 1$ $25^0 = 1$ $6^0 = 1$ $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Logo, podemos concluir que:

"sempre que a base for diferente de zero e o expoente nulo, o valor numérico da potência é ....".

ALADINO - Então, $\frac{3^0}{4} = 1$

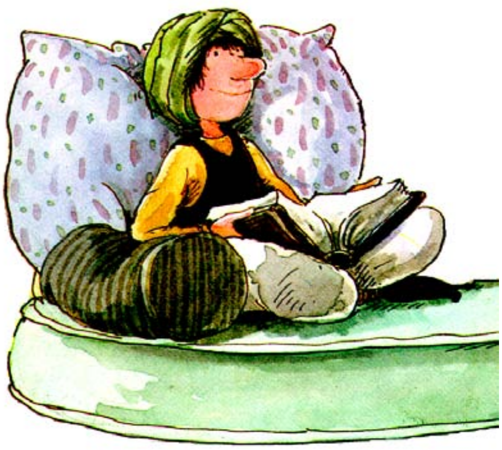
ALUNO - Não. Neste caso, como a base do numerador é .... e o denominador é ...., vem que:

$$\frac{3^0}{4} = \frac{}{4}$$

ALADINO - Como creio que ainda não estou muito seguro da matéria, proponho-te que façamos os mesmos exercícios do trabalho para casa dados pelo professor e, depois, comparamos os resultados obtidos. Concordas?

ALUNO - Está bem Aladino.

Motivado pela ajuda inicial do génio e entusiasmado com a sua presença silenciosa, Aladino não perdeu tempo. Pegou em seu livro e iniciou a leitura das páginas que abordavam as potências.



Era sua intenção mostrar ao seu amigo, também aluno no mesmo ano, que iria conseguir fazer bem todos os exercícios. Não queria ficar mal.

PROFESSOR - Eu confio nos meus alunos. Apostei com o génio e com o Aladino em como serias capaz de resolver correctamente todos os exercícios da ficha de trabalho apresentada a seguir.

FICHA DE TRABALHO

PROFESSOR - Prova ao génio e ao Aladino que não precisas de ajuda para calcular e ler potências, resolvendo sozinho os exercícios apresentados.

GRUPO I

Calcula o valor numérico das potências seguintes:

1 $3^2 =$ **2** $5^2 =$ **3** $8^2 =$

4 $2^3 =$ **5** $7^1 =$ **6** $4^0 =$

7 $4^3 =$ **8** $3^3 =$ **9** $10^2 =$

10 $5^3 =$ **11** $2^4 =$ **12** $3^4 =$

13 $10^2 =$ **14** $10^3 =$ **15** $2^5 =$

16 $4^1 =$ **17** $9^3 =$ **18** $10^0 =$

19 $\left(\frac{2}{4}\right)^3 =$ **20** $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

21 $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$

22 $\left(\frac{2^3}{3}\right)^2 =$

23 $\left(\frac{5}{3^2}\right)^1 =$

24 $\left(\frac{6^0}{2}\right)^3 =$

25 $\frac{2^3}{4} =$

26 $\left(\frac{3}{6}\right)^1 =$

27 $\frac{2}{4^3} =$

28 $\left(\frac{2}{5}\right)^0 =$

29 $\frac{5^1}{7} =$

30 $\frac{3}{4^1} =$

31 $\frac{2^0}{5} =$

32 $0{,}1^2 =$

33 $0{,}75^2 =$

34 $2{,}03^3 =$

35 $0{,}5^3 =$

36 $(2^2)^3 =$

37 $\left(\frac{1+3}{2}\right)^3 =$

38 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^2 =$

GRUPO II

1 Escreve em linguagem simbólica da matemática:

a) dois ao quadrado:

b) *três ao quadrado:*

c) cinco ao cubo:

d) a quarta potência de dois:

e) sete elevado a zero:

f) *quatro elevado a um:*

g) *dez ao cubo:*

h) *dois à quarta:*

i) *um meio ao quadrado:*

j) *seis sobre três ao quadrado:*

l) *dois ao cubo sobre cinco ao quadrado:*

m) *o quadrado de três quintos:*

2 Completa os espaços em branco do seguinte quadro:

Potência	Leitura	Valor numérico
2^3		
	Três ao quadrado	
		25
$\left(\frac{1}{2}\right)^4$		
	Cinco ao quadrado sobre sete	
	Nove sobre dois ao quadrado	
	Dois terços ao cubo	

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS

Efectuados os exercícios, o génio interveio novamente, colocando um problema.

GÉNIO - A Ana recebeu um saco com 5^2 amêndoas. Seus irmãos comeram-lhe 3^2. Com quantas amêndoas ficou a Ana?

ALUNO - Eu creio saber. Ficou com: $\square^{\square} - \square^{\square}$ amêndoas. Ora, se:

$$5^2 = \ldots \times \ldots = \ldots \; , \; 3^2 = \ldots \times \ldots = \ldots$$

seus irmãos comeram 3^2 amêndoas, então a Ana ficou com

$$\square^{\square} - \square^{\square} = \ldots - \ldots = \ldots$$ amêndoas

e podemos concluir que:

" Calculamos primeiro o .... de cada potência e, só depois, efectuamos a operação de adição ou subtracção."

ALADINO - E se a Ana tivesse recebido: $\mathbf{2^2 \times 2^3}$ amêndoas. Quantas seriam?

ALUNO - Vejamos, se transformar primeiro cada uma das potências num produto e depois em potências ...

$$2^2 \times 2^3 = (\ldots \times \ldots) \times (\ldots \times \ldots \times \ldots)$$

$$= \square^{\square} \times \square^{\square} =$$

$$= \square^{\square} = \ldots$$ amêndoas.

ALADINO - Ena, pá! Transformaste o produto de duas potências numa potência! Mantiveste a base e apenas adicionaste os expoentes.

ALUNO - Claro. O produto de duas ou mais potências com a mesma .... é uma potência com essa .... e o expoente é a .... dos ....

ALADINO - A Ana receberia então $\mathbf{2^5}$ amêndoas, isto é, 32 amêndoas dado que:

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 4 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 8 \times 2 \times 2 \\ &= 16 \times 2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

GÉNIO - Parabéns. Vejamos se sabeis transformar numa potência o produto:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = ?$$

ALUNO - Basta aplicar a mesma regra. Se a base de ambas as potências é ...., dá-se a mesma .... e adicionam-se os ....

Então, fica: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{\ }{\ }\right)^{\square}$

ALADINO - Já agora, também gostaria de ficar a saber multiplicar potências com expoentes iguais e bases diferentes.

GÉNIO - Observai o seguinte exercício já resolvido:

$$\begin{aligned} 2^4 \times 3^4 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = \\ &= (2 \times 3)^4 = \\ &= 6^4. \end{aligned}$$

Que conclusão tirais?

ALUNO - Bem... Concluo que para multiplicar potências com igual ...., dá-se o mesmo expoente e .... as bases.

GÉNIO - Calculai então o valor numérico da expressão:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$$

ALUNO - Procedo da mesma maneira.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 =$$

ALADINO - Julgo ter ficado a saber multiplicar potências. Mas ainda não sei calcular o quociente de potências. Por exemplo, de:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^2 = ?$$

ALUNO - Repara que ambas as potências têm a mesma ....
Apenas são diferentes os ....

ALADINO - Na multiplicação de potências com a mesma base e expoentes diferentes, dá-se a mesma base e adicionamos os expoentes. Aqui ...

GÉNIO - E se eu vos disser que o resultado da divisão é:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 .$$

ALUNO - Já sei. Para dividirmos potências com a mesma ....,
damos a mesma base e .... os ....

GÉNIO - E como encontrar o quociente de potências que têm expoentes iguais e bases diferentes? Por exemplo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \div \left(\frac{5}{3}\right)^7 = ?$$

ALADINO - Se os expoentes são iguais, devem então manter-se.

ALUNO – Estou a compreender. Mantemos o mesmo expoente e dividimos as bases. Assim, vem que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 \div \left(\frac{5}{3}\right)^7 = \left(\frac{\;}{\;} \div \frac{\;}{\;}\right)^7 = \left(\frac{\;}{\;} \times \frac{\;}{\;}\right)^7 = \left(\frac{\;}{\;}\right)^{\square}$$

GÉNIO - Aladino. Há algum tempo atrás chamaste-me e eu não apareci. Querias-me para te fazer o trabalho de casa e não para te ajudar. Ficai ambos sabendo que:

“SÓ SATISFAREI OS DESEJOS DE QUEM PROVAR QUERER APRENDER”.

Tendo desaparecido o génio, Aladino continuou a fazer operações com potências, particularmente aquelas que o professor lhe tinha marcado como trabalho de casa.

PROFESSOR - E tu? Gostarias de ter também o génio como amigo, mesmo não possuindo uma lamparina mágica?

É simples. O segredo consiste em resolveres correctamente todos os exercícios da ficha a seguir apresentada e nas próximas aulas mostrares que realizas correctamente as operações com potências. Então estarás mais perto de concretizar todos os teus desejos.

Boa sorte.

FICHA DE TRABALHO

Calcula o valor numérico das expressões numéricas:

1 $2^2 + 3^2 =$

2 $5^0 + 4^2 =$

3 $(6^3 + 2^2) - 5^2 =$

4 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{4} =$

5 $\frac{2}{3^2} + \frac{2^3}{9} =$

6 $\frac{2^2}{5} - \frac{3^0}{2^1} =$

7 $3^2 \times 2^3 =$

8 $3^2 \times 5^2 =$

9 $4^2 \times 4^3 =$

10 $4^2 : 2^3 =$

11 $5^5 : 5^2 =$

12 $6^2 : 3^2 =$

13 $\left(\frac{1}{5}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$

14 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2^2}{3^0} =$

15 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

16 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

17 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

18 $\left(\frac{1}{5}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

19 $2 \; + 4^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

20 $2^2 : \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 =$

21 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{3}{2}\right)^4 =$

21 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \frac{2^4}{3^4} =$