Álgebra Linear e Geometria Analítica

2º Teste ▪ 2019 Maio 28, 18:30

ISEL
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

ÁREA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA - ADM

Nome		
		Nº
Curso	LEETC ☐	LEIC ☐
Turma	LT11D ☐ LT11N ☐	LI11D ☐ LI11N ☐

Resolva os Grupos 1 e 2 da Parte 1 em folhas separadas e identifique cada folha com o seu nome, número de aluno, curso e turma. A Parte 2 é resolvida no próprio enunciado que deverá também ser identificado. A inobservância destas normas pode conduzir ao anulamento dos Grupos não identificados. É interdito o uso de calculadoras. Os telemóveis devem permanecer desligados durante a realização da prova. Duração: 1h 30m

PARTE 1

Grupo 1

1 ▪ Sendo a um parâmetro real, considere o endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $F = \begin{bmatrix} a^2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e a aplicação linear $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(1,1,0) = (-1,3)$, $g(0,-1,0) = (2,-2)$ e $g(0,1,1) = (-2,1)$.

a ▪ Mostre que, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $g(x,y,z) = (x-2y, x+2y-z)$.

b ▪ Escreva a matriz canónica de g e use-a para justificar que a aplicação g é sobrejectiva. Determine a nulidade de g.

c ▪ Determine uma base do núcleo de g.

d ▪ Determine os valores de a para os quais f é um automorfismo de $\mathbb{R}^2$ e, para tais valores de a, calcule $f^{-1}(2,1)$.

e ▪ Faça $a = 1$ e determine $(f \circ g)(x,y,z)$, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Grupo 2

2 ▪ Seja $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear representada, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a ▪ Usando a definição, mostre que o vector $(4,3,2)$ é um vector próprio de h. Indique o valor próprio associado.

b ▪ Determine o espectro de h e conclua, justificando, que h é diagonalizável.

c ▪ Indique uma base de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual a matriz de h seja diagonal e exiba essa matriz diagonal D.

3 ▪ Em $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, considere os vectores $\vec{u} = (2,-2,-1)$ e $\vec{v} = (-1,-2,2)$. Determine:

a ▪ Determine o ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

b ▪ Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

c ▪ Determine um vector unitário simultâneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

d ▪ Existirá uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Em caso afirmativo, exiba uma.

Cotações - Parte 1

Prob 1					Prob 2			Prob 3			
a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	c	d
1,5	1,5	1,0	2,0	1,5	1,0	1,5	2,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Volte s.f.f. ⇒

PARTE 2

Assinale com uma (e só uma) $\times$ a resposta correcta a cada uma das questões seguintes:

1 ▪ Atente nas seguintes proposições envolvendo funções lineares:

a ▪ Existe uma aplicação linear $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\dim\big(\text{Nuc}(f)\big) = 2$ e $\text{Img}(f) = \big\langle (1,1),(0,2) \big\rangle$.

b ▪ Existe uma aplicação linear $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Nuc}(g) = \text{Img}(g) = \big\langle (1,1,0,0),(0,0,1,1) \big\rangle$.

c ▪ Existe uma aplicação linear $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nuc}(h) = \big\langle (1,-2) \big\rangle$ e $\dim\big(\text{Img}(h)\big) = 2$.

d ▪ Existe uma aplicação linear $\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\dim\big(\text{Nuc}(\theta)\big) = 1$ e $(1,2,3) \in \text{Img}(\theta)$.

A lista completa formada pelas proposições verdadeiras é:

❑ ▪ $\{a,b,d\}$ ❑ ▪ $\{c,d\}$ ❑ ▪ $\{b,d\}$ ❑ ▪ $\{b,c\}$

2 ▪ Seja A uma matriz real quadrada cujo polinómio característico é $p_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2(\lambda-3)$.
Apenas uma das seguintes proposições é necessariamente verdadeira. Indique-a:

❑ ▪ A é diagonalizável.

❑ ▪ A não é invertível.

❑ ▪ $|A - 4I_4| = 0$.

❑ ▪ O sistema de equações lineares $(A - 3I_4)X = O$ admite soluções não nulas.

FIM

Cotações - Parte 2

Prob 1	Prob 2
2,0	2,0