Propriedades elementares dos logaritmos

1 Definição

A função logaritmo é a função inversa da exponencial. Ou seja, dados $b > 0$ ($b \neq 1$) e $x > 0$, então

$$y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y \qquad b > 0,\, b \neq 1,\, x > 0.$$

A função logaritmo *não está* definida para valores negativos do argumento, ou seja, $\log_b x$ não existe se $x \leq 0$.

2 Representação Gráfica

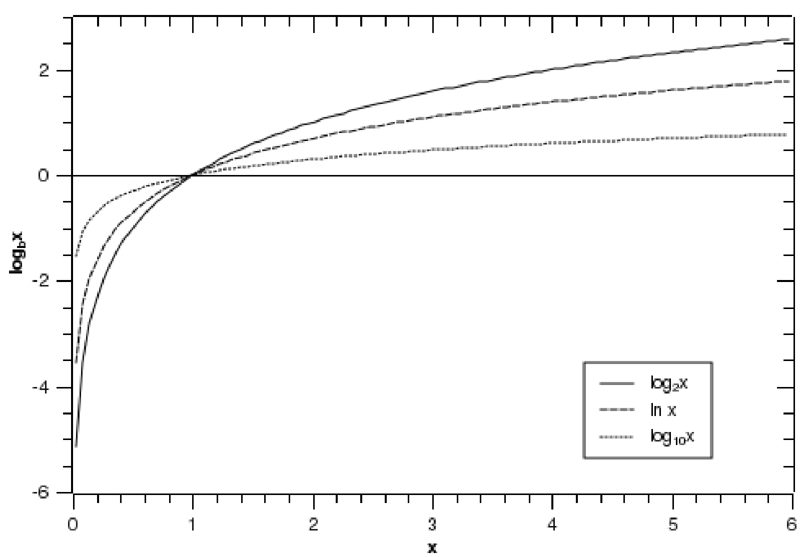

Figura 1: Gráficos da função logaritmo de base 2 (linha contínua), de base e (linha tracejada) e de base 10 (pontilhada).

3 Algumas propriedades

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b(x^a) = a \log_b x$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b b = 1$
6. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Demonstração
Sejam $\alpha = \log_b x$; $\beta = \log_b y$. Então

1. $\log_b(xy) = \log_b\left(b^\alpha b^\beta\right) = \log_b\left(b^{\alpha+\beta}\right) = \alpha + \beta = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b(x/y) = \log_b\left(b^\alpha/b^\beta\right) = \log_b\left(b^\alpha b^{-\beta}\right) = \log_b\left(b^{\alpha-\beta}\right) = \alpha - \beta = \log_b x - \log_b y$
3. Caso A — α é inteiro. Então a propriedade 3 resulta da propriedade 1. Caso B — $\alpha = 1/n$, com n inteiro. $y = \log_b\left(x^{1/n}\right) \Leftrightarrow b^y = x^{1/n} \Leftrightarrow (b^y)^n = x \Leftrightarrow n \log_b (b^y) = \log_b x \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{n}\log_b x$. Caso C — $alpha$ é um número racional (ou seja, $\alpha = n/m$, com n,m inteiros). Aplicam-se os casos A e B. Caso D — α é irracional. Neste caso, aceita-se a propriedade, servindo até para definir potências de expoente irracional.
4. Resulta de 3 com $\alpha = 0$.
5. $y = \log_b b \Leftrightarrow b^y = b \Leftrightarrow y = 1$.
6. $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow y \log_b a = \log_b x \Leftrightarrow y = \log_b x/\log_b a$

■

4 Nomenclatura e aspectos práticos

1. A expressão $\log_b x$ lê-se "logaritmo de base b de x".
2. As bases mais frequentemente usadas são a base e (Lei do decaimento radioactivo, Lei de Beer-Lambert), a base 10 (escala de pH, escala decibélica, escala de Richter), e a base 2 (definição de *bit*).
3. A generalidade das calculadoras dispõem das funções $\log_e x$ e $\log_{10} x$, designadas respectivamente como $\ln x$ e $\log x$. No entanto, a utilização da nomenclatura ln não é universal. Muitos autores usam $\log x$ para representar o logaritmo natural (de base e), designando o de base 10 pela notação padrão $\log_{10}$.
4. Usa-se a propriedade 6 para calcular logaritmos de base arbitrária. Em particular, e uma vez que as calculadoras não dispõem, em geral, de logaritmos de base 2, podemos calculá-los como

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{\ln x}{0{,}693} \qquad \text{(Logaritmos naturais)}$$

ou

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} x}{0{,}301}$$