CAPÍTULO 2

Séries Numéricas

2.1 Introdução

Desde a Antiguidade que os matemáticos se têm interessado pelas séries infinitas. Zenão criou paradoxos que criaram impasses perante as concepções que existiam na época em que viveu, cerca de 480 a.C. Por exemplo, num dos seus paradoxos - a Dicotomia - Zenão de Eleia discute o movimento de um atleta que se move entre dois pontos fixos, A e B, situados a uma distância finita, considerando uma sucessão infinita de intervalos de tempo - T_0, T_1, T_2,..., T_n,... - cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer metade da distância percorrida no movimento anterior. Um pobre atleta que deseje realizar a corrida do ponto A ao ponto B terá primeiro que efectuar o percurso até ao ponto médio entre A e B, o que lhe demorará o tempo $\frac{T}{2}$, terá depois que chegar ao ponto médio entre este ponto e B, ou seja percorrer metade da distância restante, no que gastará $\frac{T}{4}$ e assim sucessivamente. O tempo total, que demorará o trajecto, será:

$$\frac{T}{2}+\frac{T}{4}+\frac{T}{8}+...+\frac{T}{2^n}+...$$

Como era afirmado nessa época "*...Deve efectuar um número infinito de contactos com a pista num tempo limitado, o que é impossível, pois tal significa ultrapassar uma quantidade infinita num tempo finito...*" Ou seja, o atleta nunca conseguirá chegar a B!

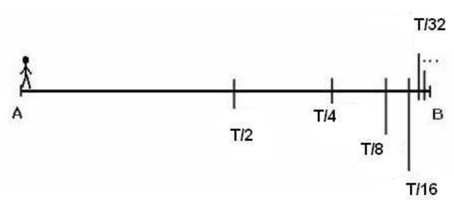

Figura 2.1: Ilustração do paradoxo - a Dicotomia - de Zenão de Eleia.

A questão de como, ao resultado de uma adição de infinitas parcelas de números positivos pode ser atribuído um número finito tem intrigado gerações de matemáticos e tem sido um contínuo desafio dando origem a animadas e interessantes questões tanto do ponto de vista filosófico como imenentemente científico.

Convém realçar que se deve a um matemático português, José Anastácio da Cunha, um papel percursor de grande relevo no estudo desta teoria (em particular, deve-se-lhe a primeira definição rigorosa do conceito de série convergente, formulada em 1790).

Esta noção de adição de infinitas parcelas de números reais é, exactamente, o objecto desta secção. Pretendemos determinar quando é que é possível atribuir um significado matemático preciso a uma expressão do tipo

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

Tal estudo faz uso do conceito de limite, fundamental em em Análise Matemática e já nosso conhecido.

2.2 Definição, natureza e exemplos de séries

Definição 2.1 *Seja u_n uma sucessão numérica. Chama-se* ***série numérica*** *a uma expressão do tipo $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$, representada em geral por:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad \sum\nolimits_{n\geq 1} u_n, \quad \text{ou apenas por } \sum u_n$$

Os números $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$, chamam-se ***termos da série****, u_n diz-se termo geral da série e as somas $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ designam-se por* ***somas parciais da série***

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1\\
&S_2 = u_1 + u_2\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3\\
&...\\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n\\
&...
\end{aligned}$$

A sucessão constituida pelas somas parciais $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ designa-se por ***sucessão das somas parciais da série****. A S_n chama-se a* ***soma parcial de ordem n****.*

Definição 2.2 *(**Natureza duma série**) Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se* ***convergente*** *se a sucessão das somas parciais, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$, converge para um número real S. Se este limite existir, chama-se* ***soma da série*** *ao seu valor, S:* $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

Se a sucessão das somas parciais for divergente, a série diz-se divergente.

Duas séries dizem-se da ***mesma natureza*** *se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Para que fique claro a distinção entre série numérica, sucessão das somas parciais da série ou soma da série vamos considerar alguns exemplos.

Exemplo 2.1 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1.$$

O seu termo geral é $u_n = 1$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n \\ ... \end{array}$$

.Como $S_n = n$ *temos que* $S_n \to +\infty$, *logo a série é divergente.*

Exemplo 2.2 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n.$$

O seu termo geral é $u_n = n$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + 2 = 3, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \\ ... \end{array}$$

.Como $S_n = n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{n^2+n}{2}$ *temos que* $S_n \to +\infty$, *logo a série é divergente.*

Exemplo 2.3 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.$$

O seu termo geral é $u_n = (-1)^n$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = -1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = -1 + 1 = 0, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \\ ... \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases} \\ ... \end{array}$$

Como $S_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$ *temos que* (S_n) *é divergente, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.4 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

O seu termo geral é $u_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l} S_1 = u_1 = 1, \\ S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{7}{4}, \\ \ldots \\ S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ \ldots \end{array}$$

Como $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ *temos que* $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2$, *é convergente.*
A série é convergente e a sua soma é 2.

Os dois exemplos anteriores são casos particulares das chamadas séries geométricas.

Exemplo 2.5 *Chama-se* ***série geométrica*** *à série gerada por uma progressão geométrica de razão* r,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \ldots + u_1 r^{n-1} + \ldots, \qquad u_1,\ r \in \mathbb{R}\ (\textit{com } u_1 \neq 0).$$

Se (u_n) *é uma progressão geométrica de razão* $r \neq 1$ *temos que:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1} = u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Sabemos que S_n é convergente se, e só se $|r| < 1$, logo a série geométrica converge se, e só se, o valor absoluto da razão da progressão geométrica, que a gera, é menor que 1. No caso de convergência temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(u_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \right) = \frac{u_1}{1 - r} = S.$$

No caso em que $r = 1$ a série é uma série de termo geral constante, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} u_1,$$

sendo $S_n = n\ u_1$ e, se $u_1 \neq 0$, a série é divergente.

No caso em que $r = 0$ a série é uma série de termo geral constante, isto é,

$$\sum_{i=1}^{n} u_n = \sum_{i=1}^{n} 0,$$

sendo $S_n = 0$, a série é convergente, logo $\lim_{n\to+\infty} S_n = 0 = S$.

Esquematicamente podemos resumir o comportamento da série geométrica, com respeito à sua natureza:

A série geométrica $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_1 r^{i-1}$ (com $u_1,\ r \in \mathbb{R}$ e $u_1 \neq 0$) é

- uma série convergente de soma $S = \dfrac{u_1}{1-r}$ se $|r| < 1$; e
- uma série divergente se $|r| \geq 1$.

Exemplo 2.6 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

é uma série geométrica de razão $r = \frac{3}{2} > 1$, logo divergente.

Exemplo 2.7 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

é uma série geométrica com primeiro termo $u_1 = 2$ e de razão $r = -\frac{1}{4}$. Como $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ a série é convergente e a sua soma é $S = \dfrac{u_1}{1-r} = \dfrac{2}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{8}{5}$.

No exemplo seguinte iremos considerar uma série que **não é** uma série geométrica

Exemplo 2.8 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

O seu termo geral é $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_1 = 1,\\
&S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}},\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}},\\
&...\\
&S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},\\
&...
\end{aligned}$$

Como

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$, a sucessão $S_n \to +\infty$, logo a série é divergente.

Exemplo 2.9 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

O seu termo geral é $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ *e a sucessão das somas parciais pode escrever-se:*

$$\begin{array}{l}
S_1 = u_1 = 1 - \frac{1}{2},\\
S_2 = u_1 + u_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},\\
S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4},\\
\ldots\\
S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},\\
\ldots
\end{array}$$

Como $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ *temos que* $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$, *a série é convergente e a sua soma é* $S = 1$.

Exemplo 2.10 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log(n) - \log(n+1)\right).$$

O seu termo geral é $u_n = \log(n) - \log(n+1)$ *e a sucessão das somas parciais é dada por:*

$$\begin{array}{l}
S_1 = u_1 = \log 1 - \log 2 = -\log 2,\\
S_2 = u_1 + u_2 = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) = \log 1 - \log 3 = -\log 3,\\
\quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \quad = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + (\log 3 - \log 4) =\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \log 1 - \log 4 = -\log 4,\\
\ldots\\
\quad Sn = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \quad = (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) + \ldots + (\log n - \log(n+1)) =\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \log 1 - \log(n+1) = -\log(n+1),\\
\ldots
\end{array}$$

.*Como* $S_n = -\log(n+1)$ *temos que* $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$, *a série é divergente.*

Os dois últimos exemplos são casos particulares de um tipo de séries chamadas **séries redutíveis**, **de Mengoli** ou **telescópicas**. São séries da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}),$$

em que k é um número natural e o termo geral se pode escrever na forma $u_n = a_n - a_{n+k}$.

Convém referir o caso particular (mas bastante frequente) em que $k = 1$, a série é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_n - a_{n+1}) + ...$$

sendo a sua sucessão das somas parciais

$$S_n = a_1 - a_{n+1}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$, podemos concluir que a sucessão (S_n) converge se, e só se, (a_n) converge e neste caso $\lim_{n\to+\infty} S_n = a_1 - \lim a_n$. Então, quanto à sua natureza, temos que:

- se (a_n) é convergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é convergente e e a sua soma é $S = a_1 - \lim a_n$;
- se (a_n) é divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ é divergente.

Nos casos anteriores estudámos duas grandes famílias de séries, as séries geométricas e as séries de Mengoli. Consideramos agora, uma única série, que, pela sua importância, merece referência especial. Trata-se da **série harmónica**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

O seu termo geral é $u_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$ e a sucessão das somas parciais é dada por:

$$\begin{aligned}&S_1 = u_1 = 1,\\ &S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \tfrac{1}{2},\\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3},\\ &...\end{aligned}$$

O termo geral da sucessão das somas parciais é dado por

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Mas, ao contrário do que acontecia nas séries anteriormente estudadas, não é possível determinar uma fórmula mais simples para o termo geral da sucessão de somas parciais, o que dificulta o estudo das suas propriedades. Embora seja a primeira vez que enfrentamos esta dificuldade, trata-se duma situação (infelizmente) bastante frequente no estudo de séries.

Proposição 2.1 *A série harmónica* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *é uma série divergente.*

Demonstração. Esta demonstração será feita por *redução ao absurdo*, técnica já utilizada nestas folhas.

Vamos admitir que a série é convergente para depois se chegar a uma situação contraditória. Assim, admitimos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é convergente. Por definição, esta suposição significa que a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente, com limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Como qualquer sua subsucessão converge para o mesmo limite, se considerarmos a subsucessão dos termos de ordem par, (S_{2n}), obtemos que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = S$.

Podemos concluir que $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0$. Mas:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, \\ S_{2n} &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n-1} + u_{2n} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

A diferença entre estes dois termos é dada por:

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Através das propriedades dos limites sabemos que

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}.$$

Obtivemos que:

$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$, por uma lado e
$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$, por outro lado

Estamos perante uma contradição, que tem de resultar da hipótese de que a série harmónica é convergente.

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é uma série divergente.

■

A divergência desta série é conhecida há muito tempo, foi demonstrada por Nicole Oresme por volta do ano 1350 com argumentos semelhantes aos que nós utilizámos. A divergência desta série é relativamente lenta, é, portanto, um bom contra-exemplo para a incorrecta mas, infelizmente muito frequente, expressão: "..*tudo o que precisamos para verificar se uma série é convergente é calcular alguns termos da série...*"

Esta série é um caso particular (muito importante) duma série de Dirichlet.

Chamam-se **séries de Dirichlet,** as séries, com α um número real fixo, da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ...$$

A série harmónica que estudámos anteriormente é um caso particular duma série de Dirichlet em que $\alpha = 1$. Como mostrámos trata-se duma série divergente.

A natureza destas séries é conhecida e, como justificaremos mais adiante:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{se} \quad \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2.3 Algumas propriedades de séries

As propriedades que iremos apresentar serão de grande utilidade para o estudo das séries nomeadamente quando é difícil o estudo da sucessão das somas parciais. É frequente não ser possível determinar uma expressão simples para o termo geral da sucessão das somas parciais.

Teorema 2.1 *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente então* u_n *é um infinitésimo, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Demonstração. Por definição, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ser convergente significa que a sucessão das somas parciais, $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ admite limite real, $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$. Mas a sucessão $S_{n+1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1}$ tende para o mesmo limite, S, uma vez que é subsucessão de (S_n). Como $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ então $\lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1})$. Então:

$$\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} \text{ por um lado e} \\ \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0, \end{array}$$

logo podemos concluir que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ e, portanto, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

Nota 2.1 *Convém notar que a recíproca desta afirmação é falsa, isto é, que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \underset{(\textit{não implica})}{\not\Rightarrow} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente.}$$

Basta recordar o exemplo da série harmónica

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

Este teorema dá-nos uma ferramenta que em muitos casos permite verificar facilmente que uma série é divergente. De facto o teorema anterior é logicamente equivalente ao seu contra-recíproco, ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ divergente.}$$

Assim qualquer série cujo termo geral não tenda para zero é necessariamente uma série divergente.

Exemplo 2.11 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Então

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \neq 0,$$

logo a série é divergente.

Teorema 2.2 *A natureza duma série não se altera pela modificação de um número finito dos seus termos. Caso a série seja convergente, a modificação de um número finito dos seus termos irá,* ***em geral, modificar a soma da série****.*

Demonstração. Considere-se uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$$

A sua sucessão das somas parciais tem termo geral $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$. Supomos que se alteram um número finito de termos da série, e que $\in \mathbb{N}$ é a maior ordem de entre as ordens dos termos alterados, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + ... + u_n + ..., \quad \text{a série original,}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = v_1 + v_2 + ... + v_{p-1} + v_p + u_{p+1} + ... + u_n + ..., \quad \text{a nova série.}$$

Consideramos as respectivas sucessões de somas parciais: (U_n) da série original e (V_n) da nova série. Então:

$$U_n = (u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p) + u_{p+1} + ... + u_n = U_p + u_{p+1} + ... + u_n,$$

$$V_n = (v_1 + v_2 + ... + v_{p-1} + v_p) + u_{p+1} + ... + u_n = V_p + u_{p+1} + ... + u_n.$$

Donde podemos escrever que

$$V_n - U_n = V_p - U_p \Longleftrightarrow V_n = U_n + (V_p - U_p).$$

Como $(V_p - U_p)$ é um número real constante, através das propriedades dos limites de sucessões, podemos concluir que V_n converge se, e só se, U_n converge. Então as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são ambas convergentes ou são ambas divergentes, isto é, têm a mesma natureza.

No caso em que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} U_n = U$, $U \in \mathbb{R}$. Então:

$$V = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} [U_n + (V_p - U_p)] = U + (V_p - U_p).$$

Assim, embora tenham a mesma natureza, as somas das séries são diferentes, $V = U + (V_p - U_p)$, desde que $V_p \neq U_p$. ∎

Através deste teorema podemos mostrar o resultado seguinte.

Corolário 2.1 *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *tem a mesma natureza que a série* $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$, $p \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.12 *Através deste resultado sabemos que as séries:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \qquad e \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$$

têm a mesma natureza. Neste caso são todas divergentes uma vez que a série harmónica é divergente.

Estes dois últimos resultados permitem o estudo do resto de ordem p duma série.

Definição 2.3 *Chama-se* ***resto de ordem p*** *da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *à série:*

$$r_p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+p} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = u_{p+1} + ... + u_n + ...$$

Através dos resultados anteriores concluimos que a se a série é convergente o mesmo acontece ao seu resto de qualquer ordem.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = (u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p) + u_{p+1} + ... + u_n + ..., \\
&S_p = u_1 + u_2 + ... + u_{p-1} + u_p, \\
&r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n = u_{p+1} + ... + u_n + ..., \\
&r_p = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - S_p.
\end{aligned}$$

O resto de ordem p de uma série convergente dá-nos o erro que se comete quando se toma para valor aproximado da soma da série a sua soma parcial S_p.

Exemplo 2.13 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Sabemos que é uma série geométrica de razão $r=\frac{1}{2}$ *e primeiro termo* 1*, logo é uma série convergente cuja soma é* $V=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

A sua soma parcial de ordem p *é* $S_p=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

O seu resto de ordem p*, é* $r_p=S-S_p=2-.\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

Neste caso determinámos o valor exacto da soma desta série. Frequentemente não se consegue determinar este valor o que torna o estudo dos restos muito importante. Através do estudo dos majorantes do valor do resto garantimos que o erro cometido na aproximação não excede um determinado valor, podemos controlar a magnitude do erro.

Proposição 2.2 *(**Operações com séries**):*

1. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ *são duas séries convergentes então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ *é convergente e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n+\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$.

2. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ *é uma série convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}cu_n$*, com* $c\in\mathbb{R}$*, é convergente e* $\sum_{n=1}^{+\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

Demonstração. 1) Consideremos as séries $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}v_n$ e as respectivas sucessões das somas parciais:

$$\begin{aligned}U_n &= u_1+u_2+...+u_n,\\ V_n &= v_1+v_2+...+v_n.\end{aligned}$$

A sucesssão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n+v_n)$ tem termo geral

$$\begin{aligned}S_n &= (u_1+v_1)+(u_2+v_2)+...+(u_n+v_n)=\\ &= (u_1+u_2+...+u_n)+(v_1+v_2+...+v_n)=\\ &= U_n+V_n\end{aligned}$$

Como as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes então $\lim_{n\to+\infty} U_n = U$ e $\lim_{n\to+\infty} V_n = V$, com $U, V \in \mathbb{R}$. Logo, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = U + V.$$

2) De forma análoga se demonstraria esta alínea que deixaremos como exercício.
■

Exemplo 2.14 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}}.$$

.

Mas $\frac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Como* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \frac{3}{4}$ *e primeiro termo* 1, *então é uma série convergente cuja soma é* $U = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$. *Da mesma forma,* $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \frac{1}{4}$ *e primeiro termo* 1, *logo é uma série convergente cuja soma é* $V = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Assim, pela proposição anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}+1}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$ *é uma série convergente de soma* $S = U + V = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.

2.4 Séries de termos não negativos

Consideramos nesta secção as séries em que os seus termos são sempre não negativos. Embora seja uma restrição ao caso geral, é muito importante a sua consideração pois permite a obtenção de alguns resultados de grande utilidade no estudo da natureza das séries.

Definição 2.4 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diz-se de* ***termos não negativos*** *se* $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Um facto importante associado a qualquer série de termos não negativos é que a sua **sucessão de somas parciais é uma sucessão crescente**:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n \quad &= (u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1}) - (u_1 + u_2 + ... + u_n) = \\ &= u_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \\ \Longleftrightarrow \quad & S_{n+1} \geq S_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Este facto tem consequências importantes na obtenção de resultados para as sucessões de termos não negativos.

Teorema 2.3 ***(Condição necessária e suficiente de convergência)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos. Então:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente} \iff (S_n) \text{ é uma sucessão majorada.}$$

Demonstração. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ convergente. Então, por definição, a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente, logo é limitada e, portanto, majorada.

Supomos, agora que (S_n) é uma sucessão majorada. Como é, sempre, uma sucessão crecente então é também minorada, logo limitada. Então a sucessão das somas parciais (S_n) é uma sucessão convergente pois é monótona e limitada. Consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente. ■

Uma das razões que nos leva a estudar este caso das séries de termos não negativos é que a determinação da sua natureza é muitas vezes facilitada por critérios de comparação entre os seus termos e os termos de outra série cuja natureza seja conhecida. Infelizmente, estes critérios não nos permitem determinar, caso as séries sejam convergentes, a sua soma. Permitem, no entanto, determinar a sua natureza.

Teorema 2.4 ***(Primeiro critério de comparação)*** *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *duas séries de termos não negativos. Se, a partir de certa ordem p*

$$u_n \leq v_n, \text{ para todo o } n \geq p$$

Então:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente,*
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente* $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente.*

Demonstração. Como a modificação de um número finito de termos duma série não altera a sua natureza, podemos admitir sem perda de generalidade, que $p = 1$. Designando por U_n e V_n os termos gerais das sucessões das somas parciais, de cada série,

$$U_n = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$
$$V_n = v_1 + v_2 + ... + v_n,$$

temos que

$$U_n \leq V_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1) Admitimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente.Então, pelo teorema anterior, sabemos que a sucessão das somas parciais (V_n) é uma sucessão majorada. Como $U_n \leq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então a sucessão (U_n) também é uma sucessão majorada. Mais uma vez, pelo teorema anterior, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Admitimos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. Então, pelo teorema anterior, sabemos que a sucessão das somas parciais (U_n) não é uma sucessão majorada. Como $U_n \leq V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ então a sucessão (V_n) também não é uma sucessão majorada.Mais uma vez, pelo teorema anterior, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente. ■

Vamos aplicar este critério, utilizando as séries que estudámos e cuja natureza conhecemos, que já formam uma base de dados bastante razoável.

Exemplo 2.15 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

que é uma série de termos não negativos. Mas

$$n \geq \sqrt[3]{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

. Como sabemos que a série harmónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente,}$$

então, pelo critério de comparação, podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo 2.16 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

que é uma série de termos não negativos.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1) \geq n \iff (n+1)(n+1) \geq n(n+1) \iff \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Como já estudámos, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é uma série de Mengoli convergente. Podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *também é convergente.*

Exemplo 2.17 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

que é, também, uma série de termos não negativos. Mas:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)...2} \leq \frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como já estudámos, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica convergente. Podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *também é convergente.*

Enunciamos outro critério de comparação que seprova utilizando o primeiro critério.

Proposição 2.3 *(**Segundo critério de comparação**) Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *uma série de termos positivos.tais que* $\frac{u_n}{v_n} \to L$. *Tem-se que:*

- *se* $L \neq 0, +\infty$, *então as séries são da mesma natureza;*
- *se* $L = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também é convergente;*
- *se* $L = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *também é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos, em primeiro lugar que $L = 0$. Se $\dfrac{u_n}{v_n} \to 0$, existe uma ordem a partir da qual $u_n \leq v_n$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente, pelo primeiro critério de comparação.

2) Consideremos, em segundo lugar que $L = +\infty$. Se $\dfrac{u_n}{v_n} \to +\infty$, existe uma ordem a partir da qual $\dfrac{u_n}{v_n} \geq 1$, e, portanto, $u_n \geq v_n$.Podemos concluir que, se $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é divergente, pelo primeiro critério de comparação.

3) Finalmente consideramos o caso em que $\dfrac{u_n}{v_n} \to L$, com $L \neq 0, +\infty$ (como as séries são de termos não negativos então L é um real positivo).

Recordando a definição de limite de uma sucessão:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - L \right| < \varepsilon,$$

que é equivalente a afirmar que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow L - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < L + \varepsilon.$$

Escolhemos ε tal que $0 < \varepsilon < L$, ou seja, $0 < L - \varepsilon$. Como $v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ obtemos que:

$$0 < (L - \varepsilon) . v_n < u_n < (L + \varepsilon) . v_n.$$

Utilizando o primeiro critério de comparação tem-se, a partir desta desigualdade, que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente } &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (L - \varepsilon) . v_n \text{ convergente (pois } (L - \varepsilon) . v_n < u_n) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ convergente;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ convergente } &\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (L + \varepsilon) . v_n \text{ convergente (pois } u_n < (L + \varepsilon) . v_n) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente.} \end{aligned}$$

A convergência de uma das séries implica a convergência da outra. De forma análoga, se provaria que a divergência de uma das séries implica a divergência da outra.

Concluindo, as duas séries têm a mesma natureza. ∎

Exemplo 2.18 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

que é uma série de termos não negativos. Já mostrámos, num exemplo anterior, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *é uma série de Mengoli, convergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \neq 0, +\infty.$$

Então por este critério as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *tem a mesma natureza, logo a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente.*

Exemplo 2.19 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos. Já mostrámos, no exemplo anterior, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é uma série convergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\log n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$ *também é convergente.*

Exemplo 2.20 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos. Sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\sqrt[5]{n} + \sqrt[3]{n}} = +\infty.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[5]{n}+\sqrt[3]{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo 2.21 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}.$$

Trata-se duma série de termos não negativos.

Sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente e de termos positivos. Calculemos*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n}} = 0$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é uma série divergente, por este critério nada podemos concluir.*

Sabemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é uma série convergente e de termos positivos.*

Calculemos.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$

Então, por este critério, como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, podemos concluir que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$ *também é convergente.*

Corolário 2.2 *Sejam* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *duas séries de termos positivos.tais que, existe uma ordem* $p \in \mathbb{N}$ *em que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \geq p.$$

Então:

1) *se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é convergente, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente,*

2) *se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente, a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ *é divergente.*

Demonstração. Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ e $v_n > 0$ temos que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Longleftrightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n},$$

ou seja, a sucessão $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ é uma sucessão decrescente a partir da ordem p. Então existe uma constante k $\left(k \geq \frac{u_p}{v_p}\right)$ tal que

$$\frac{u_n}{v_n} \leq k,$$

ou seja,

$$u_n \leq kv_n, \forall n \geq p.$$

Então:

1) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é convergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} kv_n$ é convergente, logo pelo 1^o critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente.

2) se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} ku_n$ é divergente, logo pelo 1^o critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ também é divergente. ■

Exemplo 2.22 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}.$$

Trata-se duma série de termos positivos. Sabemos que a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é uma série divergente e de termos positivos. Como:*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n(2n+2)}}{\frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

e

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1},$$

e verifica-se, facilmente, que:

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{2n+1}{2n+2},$$

o que permite concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ... \times 2n}$ *é divergente.*

Teorema 2.5 ***(Critério da Razão)*** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos positivos.*

1) *Se existirem* $r < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *tais que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq r < 1, \forall n \geq p$

   então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente.*

2) *Se existir* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \forall n \geq p$ *então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, que é uma série geométrica de razão r. Como $0 < r < 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente. Mas $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{r^{n+1}}{r^n} = r, \forall n \geq p$. Podemos concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Consideremos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$, que é uma série divergente. Como $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}, \forall n \geq p$, podemos concluir, pelo corolário anterior que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. ∎

Corolário 2.3 ***(Critério de D'Alembert)*** *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos positivos. Se existir*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \quad (a \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ou } a = +\infty),$$

então:

a) se $a < 1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$*, a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. 1) Consideremos em primeiro lugar o caso em que $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta.$$

a) Se $a < 1$, seja δ tal que $0 < \delta < 1 - a$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta, \forall n > p \quad \Longleftrightarrow -\delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} - a < \delta, \forall n > p \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a - \delta < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a + \delta, \forall n > p.$$

Mas se $\delta < 1 - a$ então $a + \delta < 1$ e a alínea 1) do critério da razão permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

b) Se $a > 1$, seja δ tal que $\delta = a - 1$. Então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - a \right| < \delta, \forall n > p \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < 2a - 1, \forall n > p.$$

Então a segunda alínea do critério da razão permite-nos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

2) Consideremos, agora, o caso em que $a = +\infty$, então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n > p.$$

Pelo teorema anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

■

Nota 2.2 *Cuidado, que se* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *nada se pode concluir através deste critério.*

Exemplo 2.23 *Considere a série de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

concluí-se, por este critério, que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ *é convergente.*

Exemplo 2.24 *Estudemos a série de termos positivos*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}, k > 0.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{k^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} k\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{k}{e},$$

o critério de D'Alembert permite-nos concluir que

$$\begin{aligned} \text{se } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{k}{e} < 1, \text{ isto é, se } k < e, \text{ a série é convergente} \\ \text{se } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{k}{e} > 1, \text{ isto é, se } k > e, \text{ a série é divergente} \end{aligned}$$

se $k = e$, através deste critério, nada podemos concluir. Temos de estudar o caso da série $\sum_{n=1}^{+\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ utilizando um outro processo. Consideremos a série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ que é uma série divergente de termos positivos. Calculemos o seguinte limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}{\dfrac{1}{n}} = +\infty.$$

Pelo segundo critério de comparação podemos concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} e\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ é divergente. Resumindo, concluimos que:

$$\text{a série } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n} \begin{cases} \text{é convergente se } k < e, \\ \text{é divergente se } k \geq e. \end{cases}$$

Teorema 2.6 *(**Critério da Raiz**) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos não negativos.*

1) *Se existirem $r < 1$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que $\sqrt[n]{u_n} \leq r, \forall n \geq p$*

   então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) *Se existirem $p \in \mathbb{N}$ e uma subsucessão (u_{n_k}), de (u_n) tal que $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} \geq 1, \forall_{n_k} \geq p$*

   então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Demonstração. 1) Consideremos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, que é uma série geométrica de razão r. Como $0 < r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ é convergente. Mas $\sqrt[n]{u_n} \leq r, \forall n \geq p$ logo $u_n \leq r^n < 1$. Portanto, pelo critério de comparação, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

2) Se $\sqrt[n_k]{u_{n_k}} \geq 1, \forall_{n_k} \geq p$ então $u_{n_k} \geq 1, \forall_{n_k} \geq p$, pelo que não tende para zero o que implica que a sucessão (u_n) também não converge para zero, logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

■

Tal como no critério da razão este teorema tem como consequência um corolário muito utilizado no estudo da natureza duma série.

Corolário 2.4 ***(Critério de Cauchy)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *uma série de termos não negativos tal que*

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a \quad (a \in \mathbb{R} \text{ ou } a = +\infty),$$

então:

a) se $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é convergente;*

b) se $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *é divergente.*

Demonstração. Seja $a = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

a) Tomamos r tal que $a < r < 1$. Podemos afirmar que

$$\exists p \in \mathbb{N} : n > p \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} < r.$$

Então, pelo teorem anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

b) Por definição de limite superior, existe uma subsucessão de $\sqrt[n]{u_n}$ com limite $a > 1$, pelo que esta sucessão tem uma infinidade de valores maiores do que 1. Pelo teorema anterior, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente. ■

Nota 2.3 *Cuidado, que se* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, *nada se pode concluir através deste critério.*

Exemplo 2.25 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

é uma série de termos positivos. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1,$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e > 1$*. Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é divergente.*

Exemplo 2.26 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}.$$

é uma série de termos positivos. Mas

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } n \text{ é para} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$*. Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é convergente.*

Exemplo 2.27 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-(-1)^n},$$

é uma série de termos positivos. Mas

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{-1} 2^{-\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

então $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$*. Podemos concluir, pelo critério de Cauchy, que a série é convergente.*

Convém realçar que o critério de Cauchy é mais geral que o critério de D'Alembert, ou seja, se não pudermos concluir a natureza de uma série através do critério de Cauchy, também não o conseguiremos fazer através do critério de D'Alembert. Tal afirmação é justificada através do seguinte facto conhecido: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \implies \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, o recíproco não é verdadeiro. Se, no exemplo anterior, aplicássemos o critério de D'Alembert, obteríamos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}} = 2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n} = \begin{cases} 2, & \text{se n é par} \\ 2^{-3}, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Logo nada se concluiria pelo critério de D'Alembert.

Para terminar esta secção, das séries de termos não negativos vamos mostrar quando é que uma série de Dirichlet é convergente.

Proposição 2.4 *Consideremos uma série de Dirichlet. Quanto à sua natureza podemos afirmar que:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{é} \begin{cases} \textit{convergente} & \textit{se} \quad \alpha > 1 \\ \textit{divergente} & \textit{se} \quad \alpha \le 1. \end{cases}$$

Demonstração. Em primeiro observamos que se trata duma série com termos não negativos.

i) Se $\alpha \le 0$, então $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \ne 0$, logo a série é divergente.

ii) Se $\alpha = 1$, trata-se da série harmónica que já provámos ser divergente.

iii) Para $0 < \alpha < 1$ tem-se que $n^\alpha \le n$ e, portanto, $\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}$. Como a série harmónica é divergente, podemos concluir, pelo critério de comparação, que a série de Dirichlet é divergente para $0 < \alpha < 1$.

iv) Para $\alpha = 2$, obtemos a série de termo geral $\frac{1}{n^2}$, que já mostrámos ser convergente.

v) Para $\alpha > 2$ usamos a desigualdade $\frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^2}$ e concluímos, pelo critério de comparação, que a série de Dirichlet converge.

vi) Resta-nos estudar o caso $1 < \alpha < 2$ (bastante mais difícil, que apresentamos como curiosidade matemática); aliás, a demonstração que faremos aplica-se sempre que $\alpha > 1$. Consideremos a sucessão das somas parciais (S_n) da série de Dirichlet com $\alpha > 1$. Tem-se:

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + ... + \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1}+2)^\alpha} + ... + \frac{1}{(2^{n-1}-1)^\alpha}\right) \le \\ &\le 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) + ... + \\ &\quad + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + ... + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha}\right) = \\ &= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + ... + \frac{2^2}{2^{(n-1)\alpha}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^k. \end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, vem que $0 < 2^{1-\alpha} < 1$, o que nos permite majorar a expressão anterior pela seguinte série geométrica convergente:

$$S_{2^n-1} \le \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{1-\alpha}\right)^k \le \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

e a série geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k$ é convergente cuja soma tem o valor $\frac{1}{1-2^{1-\alpha}}$. Vemos, assim, que a sucessão de termo geral S_{2^n-1} é majorada: sendo uma subsucessão da sucessão de termo geral S_n, que é crescente, concluimos que a sucessão das somas parciais (S_n) é majorada, logo a série é convergente, sempre que $\alpha > 1$. ■

2.5 Séries de termos sem sinal fixo

Na secção anterior estudámos séries em que todos os seus termos não podiam ser números negativos. Vamos agora considerar o caso em que uma série tem termos positivos e negativos.

Definição 2.5 *Uma série diz-se de* ***termos sem sinal fixo*** *se possui infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.*

Em particular, consideramos o caso em que ostermos positivos e negativos são alternados.

Definição 2.6 *Uma série diz-se* ***alternada*** *se os seus termos são alternadamente positivos e negativos. Supondo que o primeiro termo é positivo podemos escrevê-la na forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n, \quad u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Existe um critério bastante simples que, quando aplicável, permite rapidamente concluir a convergência duma série alternada.

Proposição 2.5 ***(Critério de Leibniz)*** *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ *uma série alternada. Se a sucessão* (u_n) *for uma sucessão decrescente, com limite zero, então a série é convergente.*

Demonstração. Vamos considerar a sucessão das somas parciais (S_n) associada à série, e duas subsucessões, cujos termos incluem a totalidade dos termos de (S_n): a subsucessão dos termos de ordem par

$$(S_{2n}) = (S_2, S_4, S_6, S_8, ...)$$

e a subsucessão dos termos de ordem ímpar,

$$(S_{2n-1}) = (S_1, S_3, S_5, S_7, ...).$$

Verifiquemos que a subsucessão dos termos de ordem par é uma subsucessão crescente.

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= (-1)^2u_1 + (-1)^3u_2 + ... + (-1)^{2n}u_{2n-1} + (-1)^{2n+1}u_{2n}, \\
S_{2(n+1)} = S_{2n+2} &= (-1)^2u_1 + (-1)^3u_2 + ... + (-1)^{2n}u_{2n-1} + (-1)^{2n+1}u_{2n}+ \\
&\quad +(-1)^{2n+2}u_{2n+1} + (-1)^{2n+3}u_{2n+2}, \\
S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}u_{2n+1} + (-1)^{2n+3}u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0
\end{aligned}$$

Então, como a sucessão (u_n) é uma sucessão decrescente, podemos concluir que

$$S_{2n+2} \geq S_{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a subsucessão dos termos de ordem par é uma subsucessão crescente.

Mas por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} S_{2n} - S_1 & = & (u_1 - u_2 + u_3 - ... + u_{2n-1} - u_{2n}) - u_1 \\ & = & \underbrace{(-u_2 + u_3)}_{\leq 0} + ... + \underbrace{(-u_{2n-2} + u_{2n-1})}_{\leq 0} + \underbrace{(-u_{2n})}_{\leq 0} \\ & \leq & 0. \end{array}$$

Então a subsucessão dos termos de ordem par é majorada. Como é majorada e crescente é convergente para um limite real **a**.

De forma perfeitamente análoga, se provaria que a subsucessão (S_{2n+1}) dos termos de ordem ímpar é decrescente e minorada logo convergente para um limite real **b**.

Então:

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) & = & b - a \ \text{ e} \\ \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) & = & \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0. \end{array}$$

Destas duas igualdades podemos concluir que $b - a = 0$, ou seja $b = a$. Como as duas subsucessões (de termos pares e ímpares) cobrem todos os termos da sucessão (S_n), o facto de convergirem para o mesmo limite $b = a$ significa que a própria sucessão converge para esse limite. Logo a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n$ é convergente. ■

Exemplo 2.28 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

que se designa ***série harmónica alternada****.*

Trata-se duma série alternada, em que a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$*, é uma sucessão decrescente e de limite zero:* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$*. Então, por este critério, a série harmónica alternada é convergente.*

Exemplo 2.29 *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{-3}} = 1 - 8 + 27 - ...$$

é uma série alternada. Mas a sucessão de termo geral $(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{-3}} = (-1)^{n+1}n^3$ *não converge para zero, é uma sucessão divergente, logo a série é divergente.*

Exemplo 2.30 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Trata-se duma série alternada. Vamos estudar os diferentes casos:

Se $\alpha \leq 0$	*a série diverge porque o seu termo geral não tende para zero.*
Se $\alpha > 0$	*a série é convergente, pelo critério de Leibniz, porque a sucessão de termo geral* $\frac{1}{n^{\alpha}}$ *é decrescente, de termos positivos e* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$.

Quando consideramos uma série alternada nas condições do critério de Leibniz, mesmo não conseguindo determinar o valor exacto do resto de uma certa ordem, r_p, obtemos uma majoração para o seu valor absoluto.

Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}u_n, \;\; u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

uma série alternada nas condições do critério de Leibniz. Então

$$|r_p| \leq u_{p+1.}$$

2.6 Convergência absoluta

Dada uma qualquer série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, define-se uma nova série, que será bastante importante no estudo que se segue, a **série dos módulos**, dada por:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + ...$$

Definição 2.7 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *diz-se absolutamente convergente se a série doa módulos* $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ *é convergente. Uma série convergente, que não seja absolutamente convergente, diz-se simplesmente convergente.*

Exemplo 2.31 *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

A série dos módulos é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

que é uma série de Dirichlet convergente. Então se a série dos módulos converge dizemos que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ *é absolutamente convergente.*

Exemplo 2.32 *Considere a série harmónica alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

que é uma série convergente.

A série dos módulos é a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

harmónica que é divergente. Logo a série é convergente mas não é absolutamente convergente. Neste caso dizemos que a série harmónica alternada é simplesmente convergente.

O teorema seguinte mostra a importância da convergência absoluta.

Teorema 2.7 *Uma série absolutamente convergente é convergente.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n \text{ é convergente.}$$

Demonstração. A demonstração baseia-se numa série auxiliar, cujo termo geral é dado por:

$$\begin{aligned} v_n &= u_n + |u_n| = \begin{cases} u_n + u_n & \text{se } u_n \geq 0 \\ u_n - u_n & \text{se } u_n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2u_n = 2|u_n| & \text{se } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } u_n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por construção, o termo geral v_n verifica a dupla desigualdade:

$$0 \leq v_n \leq 2|u_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, utilizando a hipótese da convergência absoluta da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ e as propriedades de séries já conhecidas, tem-se que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}2|u_n| \text{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}v_n \text{ é convergente}$$

sendo a última implicação resulatante do primeiro critério de comparação.

Mas, pela própria definição do termo geral v_n, tem-se:

$$v_n = u_n + |u_n| \Longleftrightarrow u_n = v_n - |u_n|\,.$$

Logo, pelas propriedades operatórias das séries,

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n| & \text{convergente} \\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n & \text{convergente} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ convergente.}$$

■

Nota 2.4 *Como a série dos módulos é, por definição, uma série de termos não negativos, podemos utilizar todos os critérios apresentados na secção das séries de termos não negativos, para identificar a natureza desta série.*

Exemplo 2.33 *Consideremos a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2},$$

que é uma série com uma infinidade de termos positivos e negativos. A respectiva série dos módulos é dada por $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$. *Mas, verifica-se a desigualdade*

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, pelo primeiro critério de comparação, tem-se que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \textit{ é convergente} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n)|}{n^2} \textit{ é convergente.}$$

Assim a série dos módulos $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ *é convergente, logo a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ *é absolutamete convergente e, como tal, convergente.*

Muitos problemas nos diferentes ramos do conhecimento podem ser expressos e resolvidos através da teoria de séries. Enunciamos dois deles.

1) O interesse pelos números primos vem desde Euclides, 300 A.C. onde prova que existe um número infinito de números primos. Euler, dois mil anos depois apresenta uma prova, com a teoria de séries, onde mostra que

Proposição 2.6 *Existe um número infinito de números primos inteiros.*

Como consequência de muitos resultados mais ou menos célebres, estudando números primos Riemann apresentou uma famosa conjectura, utilizando a não menos célebre função zeta, ζ, que se tornou num dos mais importantes problemas em matemática e que normalmente é conhecida pelo nome de hipótese de Riemann.

Conjectura 2.1 *(Hipótese de Riemann): Se z é um número complexo tal que $\zeta(z) = 0$, então a parte real de z é $\frac{1}{2}$.*

2.7 Exercícios propostos

1) Utilizando a definição de convergência de uma série, determine a natureza das séries seguintes e, sempre que possível, calcule a sua soma:

a) $2+4+6+8+...;$ *b)* $2-2+2-2+2-...;$ *c)* $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+...;$

d) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-...+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+...;$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{6}{5^{n-2}};$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n};$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n^2\,(n+1)^2};$ *h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$ *i)* $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+...;$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n\,(n+2)}};$ *l)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2}{4n^2-1}.$

2) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ uma série convergente de soma S. Indique, justificando, os limites das sucessões de termos gerais:

$$U_k=\sum_{n=1}^{2k}u_n \qquad \text{e} \qquad V_k=\sum_{n=k+1}^{2k}u_n.$$

3) Diga qual a natureza e determine o termo geral de uma série cuja sucessão das somas parciais é

$$S_n=\frac{n}{n+1}$$

4)

a) Calcule o resto de ordem 100 da série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2+n}.$

b) Determine uma ordem a partir da qual, o erro que se comete ao tomar para valor da soma da série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n+1)^2}$ a sua soma parcial, não exceda $0,1$.

5) Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

a) A soma de duas séries divergentes é divergente;
b) A soma de uma série convergente com uma série divergente é uma série divergente;
c) Se $a_n\to 0$, então a série $\sum a_n$ é convergente;
d) As séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ e $\displaystyle\sum_{n\geqslant 100}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ são da mesma natureza.

6) Prove que se a série de termos não negativos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e se $p > 1$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^p$ também converge.

7) Determine a natureza das séries de termos não negativos cujos termos gerais são:

$a)$ $1 + (-1)^n \dfrac{1}{2^n}$; $\quad b)$ $\dfrac{|\mathrm{sen}\, n|}{n^2}$; $\quad c)$ $\cos \frac{1}{n}$;

$d)$ $\dfrac{n+1}{n^3 - n + 2}$; $\quad e)$ $\dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+2)}}$; $\quad f)$ $\dfrac{\log\ n}{n}$;

$g)$ $\dfrac{1}{n\ \log\ n}$; $\quad h)$ $\dfrac{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n+1)}{3 \times 6 \times 9 \times \times ... \times (3n+3)}$; $\quad i)$ $\dfrac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}}{4^n}$;

$j)$ $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}\, n - 1}{3n+1}\right)^n$; $\quad l)$ $\dfrac{2^n n!}{n^n}$.

8) Seja (a_n) uma sucessão de números reais não nulos tais que a sucessão $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é uma sucessão constante. Mostre que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série geométrica.

9) Determine, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza da série de termo geral $\log\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

10) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos com limite $+\infty$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

é divergente e que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

é convergente.

11) Indique quais das seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n^3+1}; \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^4}{n^4+1};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n+1)}; \qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-3}{n}\right)^n; \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (1+\operatorname{sen} x)^n.$$

12) Prove que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ é convergente. Mostre que a proposição recíproca é falsa.

13) Mostre que

$$a)\ \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)} = \frac{1}{4}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n\,(n+1)} = 1.$$

14) Estude, quanto à convergência, as seguintes séries:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+1}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\ n}{n^2\sqrt{n+1}}; \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n^5+3};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^2+1}; \qquad e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}; \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-(2n+1)};$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\operatorname{sen}\tfrac{1}{n} - (n+2)\operatorname{sen}\tfrac{1}{n+2}\right).$$

15) Indique quais das seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\alpha)}{n^2}, \text{ com } \alpha\in\mathbb{R}; \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2};$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{3+\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}\right)^n; \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

16) Determine os valores de $p\in\mathbb{R}$ para os quais as seguintes séries são convergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^p\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right);$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right)^p.$$

17) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para $a \in \mathbb{R}$. Sendo $p \in \mathbb{N}$, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+p})$$

é convergente e calcule a sua soma.

18) Determine os valores do número real α para os quais a série:

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (n+1)^{-\alpha}$$

a) é simplesmente convergente;

b) é absolutamente convergente.

19) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

a) Mostre que a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ implica a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$;

b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

então também converge a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

c) Mostre, por meio dum contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

2.7.1 Soluções dos exercícios

1) a) Divergente; b) Divergente; c) Convergente, $S = \dfrac{70}{9}$; d) Convergente, $S = \dfrac{2}{3}$; e) Convergente, $S = \dfrac{15}{2}$; f) Convergente, $S = \dfrac{7}{3}$; g) Convergente; h) Divergente; i) Convergente, $S = \dfrac{1}{2}$; j) Convergente, $S = 1$; l) Convergente, $S = \dfrac{1}{5}$.

2) $\lim_{n\to+\infty} U_k = S$, $\lim_{n\to+\infty} V_k = 0$.

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, convergente.

4) a) $\dfrac{1}{101}$; b) 9.

5) a) F; b) V; c) F; d) V.

7) a) Divergente. b) Convergente. c) Divergente. d) Convergente. e) Divergente. f) Divergente. g) Divergente. h) Convergente. i) Convergente. j) Convergente. l) Convergente.

9) Convergente(absolutamente) se $\alpha > 1$; divergente se $\alpha \leq 1$.

11) a) Simplesmente convergente. b) Absolutamente convergente. c) Divergente. d) Absolutamente convergente. e) Absolutamente convergente. f) Absolutamente convergente se $x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$, divergente nos restantes casos

14) a) Divergente. b) Convergente. c) Convergente. d) Divergente. e) Convergente. f) Convergente. g) Convergente.

15) a) Absolutamente convergente. b) Divergente. c) Divergente. d) Simplesmente convergente.

16) a) $p < -\dfrac{1}{2}$; b) $p > 1$.

17) $S = a_1 + a_2 + ... + a_p - a$.

18) a) $0 < \alpha \leq 1$, b) $\alpha > 1$.

19) c) Basta considerar $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.